Matematika gyakorlatok automatizált generálása

Polgár István

Babeș–Bolyai Tudományegyetem

Témavezető: dr. András Szilárd, Egyetemi docens

2017. szeptember 23.

Amiről szó lesz

Amiről a dolgozatban szó van

A **"Matematika gyakorlatok automatizált generálása"** cím egy igencsak informatika jellegű dolgozatra enged utalni, ami részben igaz, részben nem. Valójában a matematika is, és a didaktika is egy-egy lényeges részét képezi a dolgozatnak. A vizsgamunka egy saját fejlesztésű webes felület PhP-ben és LaTeX-ben, ami Analitikus geometria és Valószínűségszámítás feladatokat, valamint azoknak részletes megoldását generálja, véletlenszerű paraméterek alapján. Összesen 30 Analitikus geometria és 20 Valószínűségszámítás feladatot tartalmaz, helyenként egy feladaton belül kettő, három, vagy akár négy alpont is megjelenik.

A téma első megközelítése - a diákok szemszöge

A téma első megközelítése - a diákok szemszöge

"A matematikában az ember nem megérti a dolgokat, hanem megszokja"
Neumann János

A téma első megközelítése - a diákok szemszöge

"A matematikában az ember nem megérti a dolgokat, hanem megszokja"
Neumann János

Mi kell a diákoknak ahhoz, hogy elboldoguljanak a nehezebb és összetettebb feladatokkal?

A téma első megközelítése - a diákok szemszöge

"A matematikában az ember nem megérti a dolgokat, hanem megszokja"
Neumann János

Mi kell a diákoknak ahhoz, hogy elboldoguljanak a nehezebb és összetettebb feladatokkal?

Hogyan kötődik a webes feladat generáló oldal az imént említett problémához?

A téma második megközelítése - a tanárok szemszöge

A téma második megközelítése - a tanárok szemszöge

"Közgazdászok gyakran emlegetik a 80/20 alapelvét, miszerint bármely helyzetben az adott "munkának" mintegy 80%-át a munkában részt vevők 20%-a "végzi el""

Malcolm Gladwell

A téma második megközelítése - a tanárok szemszöge

"Közgazdászok gyakran emlegetik a 80/20 alapelvét, miszerint bármely helyzetben az adott "munkának" mintegy 80%-át a munkában részt vevők 20%-a "végzi el""
Malcolm Gladwell

Biztosan érti mindenki mire gondolok!

A téma második megközelítése - a tanárok szemszöge

"Közgazdászok gyakran emlegetik a 80/20 alapelvét, miszerint bármely helyzetben az adott "munkának" mintegy 80%-át a munkában részt vevők 20%-a "végzi el""
Malcolm Gladwell

Biztosan érti mindenki mire gondolok!

Igazából itt mutatkozik meg a webes feladat generáló oldal ereje!

Általános problémák

Általános problémák

1

Megfelelő előjelek és műveleti jelek beállítása a paraméterek elé.

Általános problémák

1

Megfelelő előjelek és műveleti jelek beállítása a paraméterek elé.

2

Egyszerűsítések és bővítések.

Általános problémák

1

Megfelelő előjelek és műveleti jelek beállítása a paraméterek elé.

2

Egyszerűsítések és bővítések.

3

Kiemelés a gyökök alól.

Általános problémák

1

Megfelelő előjelek és műveleti jelek beállítása a paraméterek elé.

2

Egyszerűsítések és bővítések.

3

Kiemelés a gyökök alól.

4

Paraméterek megfelelő kigenerálása.

Általános problémák

1

Megfelelő előjelek és műveleti jelek beállítása a paraméterek elé.

2

Egyszerűsítések és bővítések.

3

Kiemelés a gyökök alól.

4

Paraméterek megfelelő kigenerálása.

5

Végeredmény kiszámolása és helyes formában való kiíratása.

Egy konkrét probléma

Egy háromszög csúcsai koordinátáinak kigenerálása úgy, hogy a koordináták mind egészek legyenek és a háromszög köré írt kör középpontja a lehető legegyszerűbb legyen

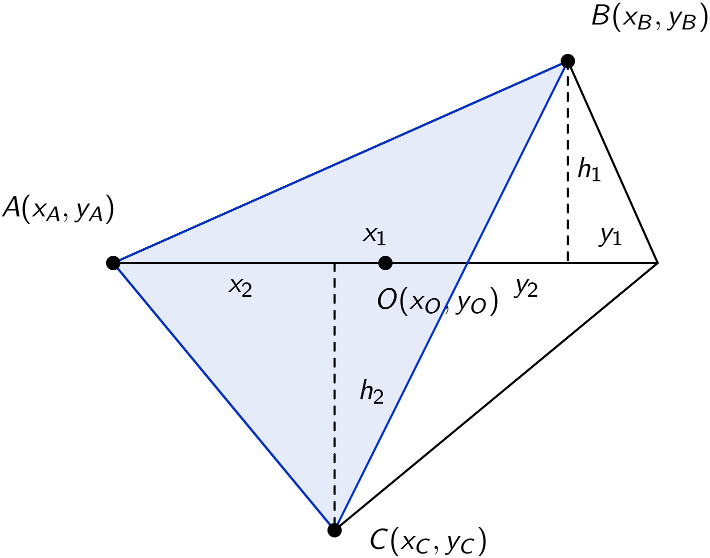
Lényegében a feladat megoldható, de az eredmény nem a legszebb, ezért kellett kitalálni valamit, hogy a paraméterek úgy generálódjanak ki, hogy a középpont koordinátái maximum racionálisak legyenek. Mivel úgy nem lehet megcsinálni, hogy minden koordináta egész legyen, ezért a következő megoldás született:

Megoldás

Megoldás

Vegyünk egy szakaszt melynek ismerjük a hosszát és egyik végpontjának koordinátái egészek. Ennek a szakasznak a felezőpontja lesz majd a háromszög köré írt kör középpontja, amelynek legrosszabb esetben az egyik koordinátája egy racionális szám. A feladat már csak az, hogy határozzuk meg két derékszögű háromszög magasságát úgy, hogy azok hossza egész legyen és az átfogójuk az adott szakaszra illeszkedjen.

Megoldás



Megoldás

Látható, hogy ha ismerjük az A pont koordinátáit és az átfogó hosszát (l) és ki tudjuk számolni a magasságok hosszát ($h_1, h_2 \in \mathbb{N}$), illetve a magasságok távolságát az adott ponttól (x_1, x_2), akkor a két derékszögű háromszög, derékszögénél lévő csúcsok koordinátái kiszámolhatók:

$$x_B = x_A + x_1; y_B = y_A + h_1 \text{ és } x_C = x_A + x_2; y_C = y_A - h_2$$

Tehát még csupán a x_1, x_2, h_1 és h_2 kiszámítása maradt. Mindkét háromszögben felírható a magasságtétel, tehát

$$h_1^2 = x_1 \cdot y_1 \text{ és } h_2^2 = x_2 \cdot y_2 \iff$$

$$h_1^2 = x_1 \cdot (l - x_1) \text{ és } h_2^2 = x_2 \cdot (l - x_2) \iff$$
$$x_1^2 - l \cdot x_1 + h_1^2 = 0 \text{ és } x_2^2 - l \cdot x_2 + h_2^2 = 0$$

Megoldás

Ezeknek a másodfokú egyenleteknek a diszkriminánsai teljes négyzetek kéne legyenek, tehát

$$\Delta_1 = l^2 - 4 \cdot h_1^2 = t_1^2 \text{ és } \Delta_2 = l^2 - 4 \cdot h_2^2 = t_2^2 \iff$$

$$l^2 = 4 \cdot h_1^2 + t_1^2 \text{ és } l^2 = 4 \cdot h_2^2 + t_2^2$$

Tehát az $(l, 2 \cdot h_1, t_1)$ és $(l, 2 \cdot h_2, t_2)$ pitagoraszi számhármasok kell legyenek. Ekkor a pitagoraszi számhármasok tagjai felírhatók a következő képen:

$$\begin{cases} l = m_1^2 + n_1^2 \\ 2 \cdot h_1 = 2 \cdot m_1 \cdot n_1 \\ t_1 = m_1^2 - n_1^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} l = m_2^2 + n_2^2 \\ 2 \cdot h_2 = 2 \cdot m_2 \cdot n_2 \\ t_2 = m_2^2 - n_2^2 \end{cases}$$

Megoldás

Tehát $m_1^2 + n_1^2 = m_2^2 + n_2^2$, így $m_1^2 - m_2^2 = n_2^2 - n_1^2$. Tehát

$$(m_1 + m_2)(m_1 + m_2) = (n_2 - n_1)(n_2 + n_1)$$

Most kaptunk egy $a \cdot b = c \cdot d$ alakot, amelyben legyen $(a, c) = d_1$ és így

$$\begin{cases} a = d_1 \cdot a_1 \\ c = d_1 \cdot c_1 \end{cases}$$

, ahol $(a_1, c_1) = 1$. Tehát $a_1 \cdot b = c_1 \cdot d$, tehát

$$\begin{cases} b = d_2 \cdot c_1 \\ d = d_2 \cdot a_1 \end{cases}$$

Megoldás

Tehát visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{cases} m_1 - m_2 = d_1 \cdot a_1 \\ m_1 + m_2 = d_2 \cdot c_1 \\ n_1 - n_2 = d_1 \cdot c_1 \\ n_1 + n_2 = d_2 \cdot a_1 \end{cases}$$

, ahonnan azt kapjuk, hogy

$$\begin{cases} m_1 = \frac{d_1 \cdot a_1 + d_2 \cdot c_1}{2} \\ m_2 = \frac{d_2 \cdot c_1 - d_1 \cdot a_1}{2} \\ n_1 = \frac{d_2 \cdot a_1 - d_1 \cdot c_1}{2} \\ n_2 = \frac{d_2 \cdot a_1 + d_1 \cdot c_1}{2} \end{cases}$$

Megoldás

Tehát, ha generáljuk az n_1, n_2, m_1 és m_2 paramétereket, úgy hogy a $d_1 \cdot a_1 + d_2 \cdot c_1$ és $d_2 \cdot a_1 + d_1 \cdot c_1$ osztható legyen 2-vel, akkor ezek segítségével megkaphatjuk a x_1, x_2, h_1 és h_2 értékeket, mégpedig a következő képen:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l+t_1}{2} \\ x_2 = \frac{l+t_2}{2} \\ h_1 = m_1 \cdot n_1 \\ h_2 = m_2 \cdot n_2 \end{cases}$$

Természetesen ügyelni kell, hogy a $l + t_1$ és $l + t_2$ is osztható legyen kettővel, mert különben az eredmény nem az elvárt lesz.

Következtetés

Látható, hogy egy egyszerű feladat paramétereinek a kigenerálása nem is olyan egyszerű és elég sok matematikát igényel, pedig első ránézésre elég könnyűnek tűnik.

Mivel bővíthető a webes felület

Mivel bővíthető a webes felület

1

Témák bővítése.

Mivel bővíthető a webes felület

1

Témák bővítése.

2

Elérhetővé tenni mindenki számára.

Mivel bővíthető a webes felület

1

Témák bővítése.

2

Elérhetővé tenni mindenki számára.

3

Feladatok és megoldások visszakeresésének lehetősége.

Mivel bővíthető a webes felület

1

Témák bővítése.

2

Elérhetővé tenni mindenki számára.

3

Feladatok és megoldások visszakeresésének lehetősége.

4

Optimalizálás.

Mivel bővíthető a webes felület

1

Témák bővítése.

2

Elérhetővé tenni mindenki számára.

3

Feladatok és megoldások visszakeresésének lehetősége.

4

Optimalizálás.

5

Hosszabb idő alatt kigenerálódó feladatlapok és megoldások lehetősége.

Tekintsünk bele a generáló webes felületbe!

Time Scraver indítása

Köszönöm szépen a megtisztelő figyelmet!